Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 3 – Conjuntos, relaciones y grupos

Jueves 16 de noviembre de 2017 (tarde)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[50 puntos]**.

8817 – 7229

4 páginas

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 11]

Considere el grupo $\{G, \times_{18}\}$, que está definido sobre el conjunto $\{1, 5, 7, 11, 13, 17\}$ y donde $\times_{18}$ representa la multiplicación módulo 18. La siguiente tabla de Cayley muestra este grupo $\{G, \times_{18}\}$.

$\times_{18}$	**1**	**5**	**7**	**11**	**13**	**17**
1	1	5	7	11	13	17
5	5	7	17	1	11	13
7	7	17	13	5	1	11
11	11	1	5	13	17	7
13	13	11	1	17	7	5
17	17	13	11	7	5	1

(a) (i) Halle el orden de los elementos $5, 7$ y 17 en $\{G, \times_{18}\}$.

(ii) Indique si $\{G, \times_{18}\}$ es o no cíclico, y justifique su respuesta. [6]

Sea $\{K, \times_{18}\}$ el subgrupo de $\{G, \times_{18}\}$ de orden dos.

(b) Escriba los elementos que hay en el conjunto K. [1]

(c) Halle las clases laterales por la izquierda de K que hay en $\{G, \times_{18}\}$. [4]

2. [Puntuación máxima: 8]

A, B y C son tres subconjuntos de un conjunto universal.

(a) Represente cada uno de los siguientes conjuntos en un diagrama de Venn:

(i) $A \Delta B$, la diferencia simétrica de los conjuntos A y B;

(ii) $A \cap (B \cup C)$. [2]

Considere los conjuntos $P = \{1, 2, 3\}$, $Q = \{2, 3, 4\}$ y $R = \{1, 3, 5\}$.

(b) (i) Para los conjuntos P, Q y R, verifique que $P \cup (Q \Delta R) \neq (P \cup Q) \Delta (P \cup R)$.

(ii) En el contexto de la propiedad distributiva, describa qué ilustra el resultado del apartado (b)(i). [6]

3. [Puntuación máxima: 9]

La relación R se define sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tal que $(x_1, y_1) R (x_2, y_2)$ si y solo si $x_1 y_1 = x_2 y_2$.

(a) Muestre que R es una relación de equivalencia. [5]

(b) Determine la clase de equivalencia de R que contiene al elemento $(1, 2)$ e ilustre el resultado gráficamente. [4]

4. [Puntuación máxima: 14]

El conjunto S se define como el conjunto de números reales mayores que 1.
La operación binaria $*$ se define sobre S mediante $x * y = (x-1)(y-1)+1$ para todo $x, y \in S$.

(a) Muestre que $x * y \in S$ para todo $x, y \in S$. [2]

(b) Muestre que la operación $*$ sobre el conjunto S es

(i) conmutativa;

(ii) asociativa. [7]

(c) Muestre que 2 es el elemento neutro. [2]

Sea $a \in S$.

(d) Muestre que todo elemento $a \in S$ tiene un simétrico. [3]

5. [Puntuación máxima: 8]

Sea $f: G \to H$ un homomorfismo entre los grupos $\{G, *\}$ y $\{H, \circ\}$, cuyos elementos neutros son e_G y e_H respectivamente.

(a) Demuestre que $f(e_G) = e_H$. [2]

(b) Demuestre que $\mathrm{Ker}(f)$ es un subgrupo de $\{G, *\}$. [6]